

КІЛЬКІСТЬ БАЛІВ ЗА КОЖНУ З ЗАДАЧ
(ДЛЯ ВАРІАНТІВ 1-12)

- 1** 1 бал;
- 2** $2/3$ бали;
- 3** а) $1/3$ бали;
б) $1/3$ бали;
в) $2/3$ бали;
- 4** а) $2/3$ бали;
б) $2/3$ бали;
- 5** $2/3$ бали.

ВАРІАНТ 1.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 12x_3 - 3x_5 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 20x_3 - 6x_4 - 12x_5 = -12, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 12x_4 + 13x_5 = 13. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -10 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 2B$, б) AB^T , в) $C^{-1}D$.

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 & -8 & 5 \\ -4 & -1 & 4 & -8 & 5 \\ -2 & 2 & -5 & 7 & 1 \\ -4 & 4 & -10 & 14 & 2 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (11, -2, -21, -10, -20)^T, & x_2 &= (2, -12, -14, -12, 0)^T, \\ x_3 &= (7, 6, -7, 0, -15)^T, & x_4 &= (-1, -10, -7, -8, 5)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -7x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 2.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 + 8x_5 = -11, \\ 3x_1 + 4x_2 - 12x_3 + 6x_4 - 9x_5 = 9, \\ 12x_1 - 6x_2 + 18x_3 - 12x_4 + 21x_5 = -32. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 5B$, б) BA^T , в) DC^{-1} .

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -6 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & -1 \\ -21 & 16 & -14 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-8, 0, 4, 4, 7)^T, & x_2 &= (-1, -5, 13, -12, -16)^T, \\ x_3 &= (-4, 4, -8, 12, 17)^T, & x_4 &= (-2, 6, -14, 16, 22)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6x_1 - x_2 - 9x_3 - 13x_4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 3.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 5x_5 = -10, \\ -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 14x_5 = -24, \\ 6x_1 + 8x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 19x_5 = 14, \\ -6x_1 - 8x_2 - 6x_3 + x_4 + 7x_5 = -1. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 4 & -5 & -3 & -3 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & -3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & -5 \\ 4 & -4 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 3B$, б) AB^T , в) $C^{-1}D$.

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & -4 & 4 & -10 \\ 4 & 12 & -6 & 0 & -6 \\ -10 & -22 & 4 & 8 & -8 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-8, -2, 6, 4, 12)^T, & x_2 &= (-16, -2, 17, 11, 20)^T, \\ x_3 &= (4, -1, -8, -5, -2)^T, & x_4 &= (8, 4, -1, -1, -16)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \\ -4x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 17x_4 \\ -x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 15x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 4.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2x_5 = -2, \\ -6x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 4, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 10x_5 = -4, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 - 20x_5 = 0. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $5A - 2B$, б) BA^T , в) DC^{-1} .

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 8 & 4 & 21 \\ 3 & -8 & 5 & 2 & 13 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 12 & -7 & -2 & -18 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, -1, 2, -4, -8)^T, & x_2 &= (4, 0, 6, -15, -27)^T, \\ x_3 &= (-2, 2, -4, 8, 16)^T, & x_4 &= (2, 18, -6, -3, 9)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 17x_4 \\ x_1 - 9x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 5.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 6x_5 = 20, \\ -3x_1 - 15x_2 + x_3 + 12x_4 + 11x_5 = -8, \\ 4x_1 + 20x_2 - 3x_3 - 12x_4 - 16x_5 = 22, \\ 4x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 23. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $4A - 3B$, б) AB^T , в) $C^{-1}D$.

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & -8 & -2 \\ -9 & -10 & -8 & -12 & -2 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-13, 21, 13, 6, 2)^T, & x_2 &= (5, 0, -5, 9, 3)^T, \\ x_3 &= (-15, 15, 15, -6, -2)^T, & x_4 &= (-1, -3, 1, -6, -2)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 6.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 - 9x_2 + 18x_3 + 2x_5 = -1, \\ 3x_2 - 6x_3 + 18x_4 + 3x_5 = 17, \\ -4x_1 - 12x_2 + 24x_3 - 18x_4 - 8x_5 = -13, \\ 6x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 12x_4 + 22x_5 = -3. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 2B$, б) BA^T , в) DC^{-1} .

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -18 & -5 & -10 \\ -5 & -7 & -1 & -3 & 8 \\ 5 & 11 & -12 & -1 & -14 \\ 0 & -4 & 13 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-6, -4, 12, -2, -14)^T, & x_2 &= (-8, 4, -6, 2, -6)^T, \\ x_3 &= (-2, -6, 15, -3, -11)^T, & x_4 &= (-12, 6, -9, 3, -9)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \\ -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 7.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 - 12x_2 + 12x_3 + 18x_5 = -12, \\ -2x_1 - 12x_2 + 3x_3 - 16x_4 + 13x_5 = 10, \\ -x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 8x_5 = -16, \\ 3x_1 + 18x_2 + 12x_4 - 12x_5 = -21. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & -5 \\ -4 & 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 4B$, б) AB^T , в) $C^{-1}D$.

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & 27 & -26 \\ 12 & -4 & 4 & 32 & -32 \\ -4 & -1 & 2 & -11 & 10 \\ 8 & -5 & 6 & 21 & -22 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (9, 1, 4, -8, 6)^T, & x_2 &= (-1, -5, 8, 4, 4)^T, \\ x_3 &= (14, 4, 2, -14, 7)^T, & x_4 &= (7, -9, 20, 0, 14)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 2x_4 \\ -3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 8.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_5 = -20, \\ -x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 16x_4 - 22x_5 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 16x_4 + 19x_5 = -21, \\ -6x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 14x_5 = 41. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -6 & 0 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 3B$, б) BA^T , в) DC^{-1} .

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 11 & -2 & -8 & 24 & 30 \\ 13 & -1 & -9 & 22 & 30 \\ -5 & -1 & 3 & -2 & -6 \\ -7 & -2 & 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, -5, -2, 0, 4)^T, & x_2 &= (-4, -31, -7, -15, 20)^T, \\ x_3 &= (3, 19, 4, 10, -12)^T, & x_4 &= (-8, -11, 1, -15, 4)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ 5x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_4 \\ -4x_1 + x_2 - 7x_3 - 8x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 9.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 2x_3 + 17x_5 = -14, \\ 10x_1 - 15x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 27x_5 = -46, \\ -4x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 4x_4 - 13x_5 = 34, \\ -8x_1 + 12x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 13x_5 = 20. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $5A - 2B$, б) AB^T , в) $C^{-1}D$.

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -6 & 6 & 5 \\ 2 & -6 & -4 & 4 & -1 \\ -6 & 7 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 15 & 15 & -15 & -6 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (8, -14, 0, 6, -24)^T, & x_2 &= (-5, -7, -7, 19, -13)^T, \\ x_3 &= (10, -4, 6, -12, -6)^T, & x_4 &= (-15, 6, -9, 18, 9)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 10.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -4x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 20x_5 = 11, \\ 8x_1 - 4x_2 - x_3 + 15x_4 - 6x_5 = 11, \\ -10x_1 - 8x_2 - 2x_3 - 15x_4 + 22x_5 = -1, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 - 25x_4 - 18x_5 = -20. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $4A - 3B$, б) BA^T , в) DC^{-1} .

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & -10 & 4 & 5 \\ 7 & -9 & 0 & 27 & 20 \\ -2 & 4 & -4 & -20 & -14 \\ -21 & 17 & 28 & 5 & -2 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (-7, -7, 14, -4, -4)^T, & x_2 &= (-5, 3, 26, -4, 0)^T, \\ x_3 &= (2, -4, -16, 2, -1)^T, & x_4 &= (-6, -16, -8, -2, -7)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + 10x_2 - 3x_3 + 7x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ -3x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 11.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 2x_5 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 12x_4 + 7x_5 = 16, \\ -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 12x_4 = -9, \\ -5x_1 + 15x_2 + 9x_3 - 6x_4 + 40x_5 = -14. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $2A - 5B$, б) AB^T , в) $C^{-1}D$.

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & -16 & 0 \\ -10 & 2 & -2 & -36 & -12 \\ 7 & -2 & 1 & 22 & 6 \\ 14 & -10 & -2 & 12 & -12 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$\begin{aligned} x_1 &= (7, 9, -6, -16, 9)^T, & x_2 &= (3, -1, -2, 4, -3)^T, \\ x_3 &= (-1, 6, 0, -14, 9)^T, & x_4 &= (-1, -11, 2, 24, -15)^T. \end{aligned}$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 \\ -3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

ВАРІАНТ 12.

1 Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_5 = -18, \\ 8x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 8x_4 - 8x_5 = -12, \\ -4x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 8x_4 + 8x_5 = -1, \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 22. \end{cases}$$

2 Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3 Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити

а) $3A - 4B$, б) BA^T , в) DC^{-1} .

4 Знайти

а) ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 15 & 15 & 9 \\ 14 & -9 & 5 & 7 & -9 \\ -7 & 7 & 10 & 9 & 12 \\ -7 & 2 & -15 & -16 & -3 \end{pmatrix}$;

б) розмірність і базис лінійної оболонки $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, якщо

$$x_1 = (-5, -1, 5, 6, 4)^T, \quad x_2 = (-1, 1, 3, 0, 8)^T, \quad (1)$$

$$x_3 = (-7, -2, 6, 9, 2)^T, \quad x_4 = (4, 2, -2, -6, 4)^T. \quad (2)$$

5 Довести, що відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 \\ 6x_1 + 3x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

є лінійним. Знайти базис ядра та образу цього лінійного відображення.

2 рівень

ВАРІАНТ 13.

- 1** [1] З яким знаком входить у визначник порядку n добуток елементів головної діагоналі? побічної діагоналі?
- 2** [2] Як зміниться добуток AB матриць A і B , якщо до i -го рядка матриці A додати j -тий рядок, помножений на число c ?
- 3** [2] Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

ВАРІАНТ 14.

- 1** [1] Знайти всі матриці другого порядку, квадрат яких дорівнює нульовій матриці. Навести геометричну інтерпретацію отриманого результату.
- 2** [2] Визначити знак перестановки $1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, \dots, 2n$.
- 3** [2] Знайти обернену до матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 15.

- 1** [1] Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- 2** [2] Довести, що слід матриці $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, де $\text{Tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
- 3** [2] Обчислити при всіх значеннях параметра λ

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 16.

- 1 [1] Знайти всі матриці другого порядку, квадрат яких дорівнює одиничній матриці. Навести геометричну інтерпретацію отриманого результату.
- 2 [2] Визначити знак перестановки $2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n - 1$.
- 3 [2] Знайти обернену до матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 17.

- 1 [1] Знайти найбільше значення, яке може приймати визначник третього порядку, за умови, що всі його елементи дорівнюють ± 1 .
- 2 [2] Як зміниться добуток AB матриць A і B , якщо переставити i -тий та j -тий рядки матриці A ?
- 3 [2] Знайти обернену до матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 18.

- 1 [1] Знайти найбільше значення, яке може приймати визначник третього порядку, за умови, що всі його елементи дорівнюють 1 або 0.
- 2 [2] Обчислити при всіх значеннях параметра λ

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

- 3 [2] Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

ВАРІАНТ 19.

- 1** [1] Як зміниться визначник порядку n , якщо перший стовпчик переставити на останнє місце, а всі інші стовпчики переставити вліво, зберігаючи їх порядок?

- 2** [2] Обчислити

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

(порядок матриці дорівнює n) для $k = 1, \dots, n$.

- 3** [2] Дослідити систему і знайти загальний розв'язок в залежності від значень параметра λ :

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 20.

- 1** [1] Чому дорівнює визначник порядку n , у якого сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами?

- 2** [2] Обчислити

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$$

(порядок даної матриці дорівнює n).

- 3** [2] Обчислити визначник порядку n , елементи якого задовольняють умову $a_{ij} = \min(i, j)$.

ВАРІАНТ 21.

- 1** [1] Як зміниться визначник порядку n , якщо його стовпчики записати в зворотному порядку?

- 2** [2] Дослідити систему і знайти загальний розв'язок в залежності від значень параметра λ :

$$\begin{cases} (1 + \lambda) x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda, \\ x_1 + (1 + \lambda) x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda) x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3. \end{cases}$$

- 3** [2] Обчислити визначник порядку n , елементи якого задовольняють умову $a_{ij} = \max(i, j)$.

ВАРІАНТ 22.

- 1** **[1]** Довести, що якщо всі елементи визначника третього порядку дорівнюють ± 1 , то сам визначник буде парним числом.
- 2** **[2]** Дослідити систему і знайти загальний розв'язок в залежності від значень параметра λ :

$$\begin{cases} (1 + \lambda) x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda) x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda) x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

- 3** **[2]** Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

ВАРІАНТ 23.

- 1** **[2]** Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

- 2** **[3]** Довести, що матричне рівняння $AX = B$ має хоча б один розв'язок тоді і тільки тоді, коли ранг матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $(A|B)$, де $A \in \mathcal{M}_{m \times l}$, $X \in \mathcal{M}_{l \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

ВАРІАНТ 24.

- 1** **[2]** Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

- 2** Довести, що кожна матриця рангу 1 має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{pmatrix} = A^T B,$$

де $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)$, $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$. **[3]**

ВАРІАНТ 25.

- 1** **[2]** Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

- 2** **[3]** Довести, що рівність $AB - BA = E$ не виконується для жодних матриць A і B .

ВАРІАНТ 26.

- 1** **[2]** Обчислити визначник порядку n , елементи якого задовольняють умову $a_{ij} = |i - j|$.
- 2** **[3]** Довести, що множення матриці A справа або зліва на невироджену матрицю не змінює її рангу.

ВАРІАНТ 27.

- 1** **[2]** Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

- 2** **[3]** Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Позначимо M_{ij} мінор з номером i, j , A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} . Утворимо нові матриці $M = (M_{ij})_{i,j=1}^n$, $\hat{A} = (A_{ij})_{i,j=1}^n$. Довести, що $\det M = \det \hat{A} = (\det A)^{n-1}$.

ВАРІАНТ 28.

- 1** **[2]** Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

- 2** Довести, що якщо ранг однорідної системи лінійних рівнянь на одиницю менше числа невідомих, то будь-які два розв'язки цієї системи пропорційні, тобто відрізняються лише числовим множником. **[3]**

ВАРІАНТ 29.

- 1** **[2]** Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

- 2** **[3]** Довести, що якщо C — невироджена матриця, то для довільної матриці A того самого порядку $\text{Tr } CAC^{-1} = \text{Tr } A$, де $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.